Suite de polygones

Théorème : La suite de polygones de sommets $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$ définie par :
$Z_{k+1} = \left((1-\lambda) z_{k,1} + \lambda z_{k,2}, \dots, (1-\lambda) z_{k,n} + \lambda z_{k,1}\right)$, $Z_0 = (z_{0,1}, \dots, z_{0,n})$ est convergente, de limite l'isobarycentre du premier polygone.

On a la relation de récurrence $Z_{k+1} = A Z_k$ où $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ \lambda & (0) & & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $Z_k = A^k Z_0$.

Lemme : Déterminant circulant.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$ $\det B = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$ où $P = \sum_{j=0} a_j X^j$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

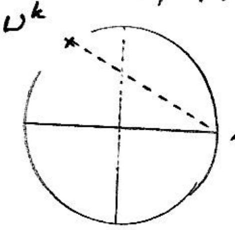
$B = P(F)$ où $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$, annulé par $X^n - 1$, scindé simple.

Donc $F \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ puis $B \sim \begin{pmatrix} P(1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$, $\det B = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-(1-\lambda) & -\lambda & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & -\lambda \\ -\lambda & & & x-(1-\lambda) \end{vmatrix}$ donc par lemme, avec $a_0 = x-(1-\lambda)$, $a_1 = -\lambda$,
$P = x - (1-\lambda) - \lambda X$.

$\chi_A(x) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(x - (1-\lambda) - \lambda \omega^j\right)$ donc $Sp(A) = \{1-\lambda+\lambda\omega^j,\ j \in \{0, \dots, n-1\}\}$.
toutes distinctes, donc A est diagonalisable, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1-\lambda+\lambda\omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\lambda+\lambda\omega^{n-1} \end{pmatrix}$

Lemme : $\forall k \geq 1$, $|1-\lambda+\lambda\omega^k| < 1$.



$1-\lambda+\lambda\omega^k$ est barycentre de 1 et de ω^k, $\lambda \in]0,1[$.

De là, par passage à la limite sur $Z_k = A^k Z_0$, $Z_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} A_\infty Z_0$ où $A_\infty \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

Si $X = A_\infty Z_0$, la relation $Z_{n+1} = A Z_n$ assure par continuité $X = AX$.

Donc $X \in E_1(A) = \mathrm{Vect}(1, \dots, 1)$ car de dimension 1 : $X = (\alpha, \dots, \alpha)$.

De plus, si g_k désigne l'isobarycentre de P_k, alors :

$g_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{k+1,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda) z_{k,i} + \lambda z_{k,i+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{k,i} = g_k = \dots = g_0$.

Donc, par passage à la limite et par continuité, l'isobarycentre de X est g_0.
Or X est un point, donc $X = (g_0, \dots, g_0)$